ELSEVIER
Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Journal of Algebra 274 (2004) 607–628
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Sur les représentations modulaires des algèbres de Hecke de type D_n

Nicolas Jacon

Institut Girard Desargues, bat. Jean Braconnier, Université Lyon 1, 21, av Claude Bernard, F-69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 18 février 2003

Communiqué par Michel Broué

Résumé

Nous déterminons « l'ensemble basique canonique » $\mathcal{B}$ pour les algèbres de Hecke de type D_n. Cet ensemble, défini par Geck et Rouquier dans [Modular Representation Theory of Finite Groups (Charlottesville, VA, 1998), de Gruyter, Berlin, 2001, pp. 211–221] à l'aide de la a-fonction de Lusztig, fournit une paramétrisation des modules simples pour les algèbres de Hecke à paramètres égaux dans le cas modulaire.

1. Introduction

Soit W un groupe de Weyl fini (ou, plus généralement, un groupe de Weyl étendu). Soit H l'algèbre de Iwahori–Hecke correspondante, définie sur l'anneau $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ où v est une indéterminée et $u = v^2$.

Soit K, le corps des fractions de A et soit $H_K := K \otimes_A H$. Suivant [15], c'est une algèbre semi-simple déployée. On considère maintenant une spécialisation $\theta : A \to k$ où k est un corps et $q := \theta(u)$ est une racine de l'unité d'ordre e telle que $H_k := k \otimes_A H$ n'est plus semi-simple. On a alors une « matrice de décomposition » D_θ. Dans [11] (pour le cas des groupes de Weyl) et dans [12] (pour le cas des groupes de Weyl étendus), M. Geck

Adresse e-mail : jacon@igd.univ-lyon1.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2003.09.047

a montré que pour un bon ordre des lignes et colonnes, cette matrice a toujours la forme suivante :

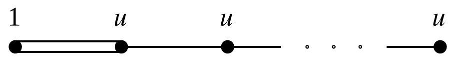
$$D_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & * & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Où on rappelle que les lignes (respectivement les colonnes) de D_θ sont indexées par $\mathrm{Irr}(H_K)$ (respectivement $\mathrm{Irr}(H_k)$).

Dans [14], en utilisant la base de Kazhdan–Lusztig de H et des propriétés de la a-fonction introduite par Lusztig, M. Geck et R. Rouquier ont montré qu'il existe une partie « canonique » $\mathcal{B} \subset \mathrm{Irr}(H_K)$ en bijection avec $\mathrm{Irr}(H_k)$ et telle que la sous-matrice de D_θ formée sur les lignes de $\mathcal{B}$ soit unitriangulaire. Cet ensemble $\mathcal{B}$ nous fournit ainsi une paramétrisation de $\mathrm{Irr}(H_k)$.

Il serait très intéressant de déterminer l'ensemble $\mathcal{B}$ pour tout groupe de Weyl W et pour toute spécialisation θ.

Le seul cas entièrement résolu est celui où W est de type A_{n-1} ; voir [11, Exemple 3.5] (la démonstration utilise des résultats de Dipper et James [7]). Pour le cas où W est de type D_n, M. Geck a montré que le problème se réduit à l'étude d'une algèbre de Iwahori–Hecke H de type B_n avec diagramme :



où $u = v^2$. C'est une algèbre avec générateurs $\{T_s \mid s \in S\}$ où $S = \{\sigma, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ et relations :

$$\begin{gathered}
(T_\sigma - 1)(T_\sigma + 1) = 0, \qquad (T_{s_i} - u)(T_{s_i} + 1) = 0 \quad (i \geqslant 1), \\
T_\sigma T_{s_1} T_\sigma T_{s_1} = T_{s_1} T_\sigma T_{s_1} T_\sigma, \qquad T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i} \quad (j \geqslant i+2), \\
T_{s_i} T_{s_{i-1}} T_{s_i} = T_{s_{i-1}} T_{s_i} T_{s_{i-1}} \quad (2 \leqslant i \leqslant n-1).
\end{gathered}$$

(Cette algèbre peut être vue comme une algèbre étendue de type D_n, voir [12].)

En spécialisant cette algèbre par $\theta(u) = q$, racine de l'unité d'ordre e, on obtient une algèbre non semi-simple en général. S. Ariki et A. Mathas [3] et S. Ariki [1] ont obtenu une paramétrisation de l'ensemble $\mathrm{Irr}(H_k)$ par certaines bipartitions appelées bipartitions Kleshchev et, pour le cas e impair, M. Geck a montré que cette paramétrisation correspond à celle de $\mathcal{B}$. Lorsque e est pair, comme noté dans [12, Example 6.7], ce résultat ne peut pas se généraliser.

Le résultat principal de cet article, le Théorème 4.5, donne une description explicite de l'ensemble $\mathcal{B}$ associé à H lorsque e est pair. Ceci implique une certaine classe de bipartitions mise en évidence par O. Foda, B. Leclerc, M. Okado, J.-Y. Thibon et T. Welsh dans [10].[1]

Comme conséquence, ce résultat nous permettra de déterminer $\mathcal{B}$ pour le type D_n (Corollaire 5.2) et ainsi de donner une paramétrisation des modules simples pour les algèbres de Hecke de type D_n non semi-simple à un paramètre.

Dans la deuxième partie, nous rappellerons brièvement les résultats obtenus par Dipper–James, Ariki–Mathas, Geck–Rouquier et Foda–Leclerc–Okado–Thibon–Welsh concernant les représentations irréductibles des algèbres de Hecke de type B_n avec diagramme comme ci-dessus. Nous donnerons ensuite quelques propriétés sur les a-fonctions de Lusztig ainsi que sur les classes de bipartitions impliquées dans $\mathcal{B}$. La quatrième partie contient le théorème principal de cet article. Dans la cinquième partie, nous expliquerons les conséquences de ce résultat sur la classification des représentations modulaires des algèbres de Hecke de type D_n.

2. Préliminaires

Nous donnons ici les résultats et les définitions nécessaires à la démonstration du théorème principal.

2.1. Nombres de décomposition

Dans cette sous-section, nous énonçons quelques résultats concernant la matrice de décomposition d'une algèbre de Iwahori–Hecke H quelconque. On garde ici les notations adoptées dans l'introduction.

Soient $R(H_K)$ et $R(H_k)$ les groupes de Grothendieck des modules de type fini sur H_K et H_k. On a une application de décomposition bien définie de $R(H_K)$ vers $R(H_k)$ par :

$$\text{pour tout } V \in \operatorname{Irr}(H_K) \quad d_k^H\big([V]\big) = \sum_{M \in \operatorname{Irr}(H_k)} d_{V,M}[M].$$

Suivant M. Geck et R. Rouquier [14], notons $\{C_w\}_{w \in W}$ la base de Kazhdan–Lusztig de H et $a : W \to \mathbb{N}^*$ la a-fonction de Lusztig, on peut associer à chaque module simple M de H_k ou de H_K des a-fonctions de Lusztig définies par :

$$a_M := \max\big\{i \geqslant 0 \mid C_w M \neq 0 \text{ pour un } w \in W \text{ avec } a(w) = i\big\}.$$

Et on a la propriété suivante (voir [11, Théorème 3.3]) :

$$d_{V,M} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_M \leqslant a_V.$$

Soit $\mathcal{O} \subset K$, un anneau de valuation de corps résiduel k convenablement choisi (voir [14]). On définit la partie $\mathcal{B} \subset \operatorname{Irr}(H_K)$ en bijection avec $\operatorname{Irr}(H_k)$ grâce au théorème suivant :

[1] Nous remercions B. Leclerc et H. Miyachi pour avoir porté notre attention sur cet article.

Théorème 2.1 (Geck–Rouquier). *Soit $M \in \mathrm{Irr}(H_k)$ et soit $P(M)$ le $H_{\mathcal{O}}$-module projectif indécomposable qui est une couverture projective de M (voir* [5, *Section* 6C]). *Alors il existe un unique H_K-module simple V_M tel que $a_M = a_{V_M}$ et tel que :*

$$\left[P(M)_K\right] = [V_M] + \sum_{\substack{S \in \mathrm{Irr}(H_K) \\ a_S > a_{V_M}}} d_{S,M}[S].$$

L'application $M \to V_M$ est injective et donc la partie $\mathcal{B} := \{V_M \mid M \in \mathrm{Irr}(H_k)\}$ est en bijection avec $\mathrm{Irr}(H_k)$.

Ce résultat prouve que la matrice de décomposition de H a une forme unitriangulaire. Nous utiliserons cette caractérisation de $\mathcal{B}$ dans la cinquième partie.

2.2. *Modules simples des algèbres de Hecke de type B_n à paramètres $\{1, u\}$*

Dans la suite de l'article, on se place dans le cas où (W, S) est un groupe de Coxeter de type B_n avec $S = \{\sigma, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Soit H l'algèbre de Iwahori–Hecke correspondante avec paramètres spécifiés dans l'introduction.

Soit $K := \mathbb{C}(v)$ et $H_K := K \otimes_A H$. C'est une algèbre de Hecke semi-simple déployée (voir [15] et [13, Section 7.4]) et ses modules irréductibles ont une paramétrisation naturelle par l'ensemble Λ des bipartitions de n :

$$\mathrm{Irr}(H_K) = \left\{V^{(\lambda,\mu)} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \Lambda,\ |\lambda| + |\mu| = n\right\}.$$

De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \Lambda$, Dipper, James et Murphy ont construit un module de Specht $S^{(\lambda,\mu)}$, défini sur l'anneau A et vérifiant $S_K^{(\lambda,\mu)} \simeq V^{(\lambda,\mu)}$ (voir [9]).

Considérons maintenant une spécialisation $\theta : A \to \mathbb{C}$ tel que $\theta(u) = q$ est une racine de l'unité d'ordre e. Soit $H_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Hecke correspondante, elle peut être vue comme une algèbre cyclotomique de type $G(2, 1, n)$ à paramètre $\{q, 1, -1\}$. Nous donnons ici les différentes paramétrisations de $\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$ obtenues par Ariki–Mathas et Foda–Leclerc–Okado–Thibon–Welsh.

Chaque module de Specht $S_{\mathbb{C}}^{(\lambda,\mu)}$ possède une $H_{\mathbb{C}}$-forme bilinéaire naturelle et un radical associé noté $\mathrm{rad}(S_{\mathbb{C}}^{(\lambda,\mu)})$ tels que les modules $D^{(\lambda,\mu)} := S_{\mathbb{C}}^{(\lambda,\mu)}/\mathrm{rad}(S_{\mathbb{C}}^{(\lambda,\mu)})$ non nuls forment l'ensemble des modules simples de $H_{\mathbb{C}}$.

S. Ariki et A. Mathas (voir [1,3]) ont montré que les modules $D^{(\lambda,\mu)}$ non nuls sont indexés par une certaine classe de bipartitions appelée bipartitions Kleshchev.

Notons Λ_0 l'ensemble de ces bipartitions, on a donc :

$$\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}}) = \left\{D^{(\lambda,\mu)} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \Lambda_0,\ |\lambda| + |\mu| = n\right\}.$$

Si e est impair, les bipartitions Kleshchev correspondent à l'ensemble des bipartitions (λ, μ) où λ et μ sont des partitions e-réguli (voir [8]).

Si e est pair, la définition est plus compliquée et donnée de façon récursive (voir [1] pour plus de détails). Dans ce cas, Foda–Leclerc–Okado–Thibon–Welsh ont donné une paramétrisation plus agréable de $\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$ (qui fonctionne aussi pour le cas e impair). Afin de définir ces bipartitions, introduisons quelques définitions :

Soit $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ une bipartition de n avec $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_p^{(1)})$ et $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_p^{(2)})$ (où $\lambda_1^{(1)} \geqslant \lambda_2^{(1)} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p^{(1)}$ et $\lambda_1^{(2)} \geqslant \lambda_2^{(2)} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p^{(2)}$). Soit T_λ le tableau de Young associé à cette bipartition. Soit η une boîte de T_λ, on notera $\eta = (a, b, c)$ si η se trouve sur la $b$ième colonne de $\lambda_a^{(c)}$.

Exemple. Pour $(\lambda, \mu) = (4.2, 3.1)$

$$T_{(\lambda,\mu)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \eta \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

On a ici $\eta = (1, 3, 2)$.

Soit $\eta = (a, b, c)$ une boîte de T_λ, on définit le résidu de η par :

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(\eta) &= b - a \pmod{e} \quad \text{si } c = 1, \\ \mathrm{res}(\eta) &= b - a + \frac{e}{2} \pmod{e} \quad \text{si } c = 2. \end{aligned}$$

Exemple. Pour $(\lambda, \mu) = (4.2, 3.1)$ et $e = 4$

$$T_{(\lambda,\mu)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

On définit alors la classe de bipartition suivante :

Définition 2.2 (*Foda–Leclerc–Okado–Thibon–Welsh* [10]). Soit (α, β) une bipartition de n avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ et $\alpha_m \neq 0$ ou $\beta_m \neq 0$. On dit que (α, β) est une a-bipartition si et seulement si :

(1) (α, β) est cylindrique c'est à dire : $\alpha_i \geqslant \beta_{i+e/2}$ et $\beta_i \geqslant \alpha_{i+e/2}$ pour tout $i > 0$.
(2) Pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus des boîtes de la forme (a, k, c) avec $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans $\{0, 1, \dots, e - 1\}$.

On notera Λ_1 l'ensemble des a-bipartitions.

Exemple. Soit $(\lambda, \mu) = (1.1.1, 2.1)$ et $e = 4$, alors la condition (1) de a-bipartition est vérifiée, pour la condition (2) :

$$T_{(\lambda,\mu)} = \left(\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Si on considère les boîtes $(a, 1, c)$ avec $\lambda_a^{(c)} = 1$, on voit que l'ensemble de leurs résidus est $\{0, 1, 2, 3\}$. Donc la condition (2) n'est pas vérifiée et (λ, μ) n'est pas une a-bipartition.

Dans le cas e pair, Foda–Leclerc–Okado–Thibon–Welsh ont montré que ces bipartitions sont en bijection avec les bipartitions Kleshchev. Notons $\widetilde{(\lambda, \mu)} \in \Lambda_0$ l'image de $(\lambda, \mu) \in \Lambda_1$ par cette bijection et définissons $\widetilde{D}^{(\lambda,\mu)} := D^{\widetilde{(\lambda,\mu)}}$, on a donc :

$$\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}}) = \left\{ \widetilde{D}^{(\lambda,\mu)} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \Lambda_1,\ |\lambda| + |\mu| = n \right\}.$$

Ce sont ces bipartitions qui vont paramétrer l'ensemble $\mathcal{B}$ pour le type B_n avec le diagramme de l'introduction. Pour la démonstration de cette propriété, nous nous servirons seulement du fait que le nombre de bipartitions Kleshchev de degré n est égale au nombre de a-bipartitions de degré n.

Exemple. Pour $e = 4$ et $n = 3$, on a :

$$\Lambda_0 = \big\{(2, 1), (3, \emptyset), (1, 2), (1, 1.1), (2.1, \emptyset), (\emptyset, 2.1), (1.1, 1), (1.1.1, \emptyset)\big\},$$
$$\Lambda_1 = \big\{(3, \emptyset), (\emptyset, 3), (1, 2), (2, 1), (2.1, \emptyset), (\emptyset, 2.1), (1.1, 1), (1, 1.1)\big\}.$$

2.3. Espace de Fock

Considérons l'espace de Fock $\mathcal{F}_e$ avec e pair, c'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel avec base donnée par l'ensemble Λ des bipartitions. Chaque bipartition (λ, μ) de $\mathcal{F}_e$ s'identifie à un module de Specht $S^{(\lambda,\mu)}$.

Soit $\mathcal{G}(A_{e-1}^{(1)})$ l'algèbre de Kac–Moody de type $A_{e-1}^{(1)}$ générée par les éléments e_i, f_i, h_i et d pour $i \in \{0, 1, \ldots, e-1\}$. Alors $\mathcal{F}_e$ possède une structure de $\mathcal{G}(A_{e-1}^{(1)})$-module (voir [2] ou [3, Section 2]). Avec les notations de [2], pour $\underline{\lambda} \in \Lambda$, l'action est donnée par :

$$e_i.\underline{\lambda} = \sum_{\underline{\mu}:\ \mathrm{res}(\underline{\lambda}/\underline{\mu})=i} \underline{\mu}, \qquad f_i.\underline{\lambda} = \sum_{\underline{\mu}:\ \mathrm{res}(\underline{\mu}/\underline{\lambda})=i} \underline{\mu},$$
$$h_i.\underline{\lambda} = N_i(\underline{\lambda})\underline{\lambda}, \qquad d.\underline{\lambda} = -W_0(\underline{\lambda})\underline{\lambda},$$

où W_0 est le nombre de 0-boîtes et N_i est le nombre de i-boîtes supprimables.

Les opérateurs f_i et e_i correspondent aux opérateurs de i-induction et de i-restriction.

Date–Jimbo–Kuniba–Miwa–Okado ont montré que le $\mathcal{G}(A_{e-1}^{(1)})$-module U engendré par $(\emptyset, \emptyset)$ est un $\mathcal{G}(A_{e-1}^{(1)})$ module irréductible de plus haut poids (voir [6]). De plus, une base de U est donnée par les :

$$G(\underline{\mu}) = \sum_{\underline{\mu} \trianglerighteq \underline{\lambda}} d_{\underline{\lambda},\underline{\mu}} \underline{\lambda}$$

où $\underline{\mu} \in \Lambda_0$, où les $d_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}$ sont les nombres de décomposition de l'algèbre de Hecke de type B_n et $\trianglerighteq$ l'ordre de dominance usuel (voir [3]).

Dans l'identification $\underline{\lambda} \in \mathcal{F}_e \leftrightarrow S^{\underline{\lambda}} \in \mathrm{Irr}(H_K)$, les $G(\underline{\mu})$ correspondent aux $H_{\mathcal{O}}$-modules projectifs indécomposables.

Pour le cas e pair, nous allons par la suite définir un ensemble $\{A(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1\}$ formant une base de U et ramener le problème de trouver les bipartitions de a-fonction minimale dans le développement des $G(\underline{\mu})$ à celui de trouver les bipartitions de a-fonction minimale dans le développement des $A(\bar{\underline{\lambda}})$ pour $\underline{\lambda} \in \Lambda_1$.

3. *a*-fonction de Lusztig

Dans la suite de l'article, on posera e pair.

Dans cette partie, nous introduisons quelques notations et donnons la définition de la a-fonction pour le type B_n avec diagramme spécifié dans l'introduction.

3.1. Définitions et propriétés

La a-fonction pour le type B_n à paramètre $\{1, u\}$ (avec diagramme donné dans l'introduction) se définit sur les bipartitions de n. Nous allons ici étendre cette définition aux bicompositions de n.

On suit ici [13, Section 6.4]. Soit donc (α, β) une bicomposition de n avec $\alpha_m \neq 0$ ou $\beta_m \neq 0$. On considère la collection d'éléments $(\alpha_i + m - i)_{i=1,\dots,m}$ et $(\beta_j + m - j)_{j=1,\dots,m}$ que l'on écrit dans l'ordre décroissant :

$$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_{2m},$$

avec la convention suivante : si $\gamma_{i_1} = \gamma_{i_2}$ et $i_1 < i_2$ alors la part de (α, β) associée à γ_{i_2} est plus petite ou égale à celle associée à γ_{i_1}.

On définit alors la a-fonction de (α, β) par :

$$a(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{2m} (i-1)\gamma_i - \sum_{i=1}^{m} \binom{2m-2i}{2i}.$$

La partition $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2m})$ sera appelée a-collection associée à (α, β). Notons que, quitte à prendre m suffisamment grand, on pourra toujours supposer que deux bicompositions de même degré ont des a-collections de même degré.

Si (α, β) est une bicomposition de n, on a un tableau associé. On peut donc étendre la notion de résidus sur ces bicompositions grâce à la même définition (voir Section 2.2). Les boîtes $\eta_j = (j, \alpha_j, 1)$ pour $j = 1, \dots, m$ et $\alpha_j \neq 0$ et $\eta'_i = (i, \beta_i, 2)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $\beta_i \neq 0$ seront appelées les boîtes de la frontière de (α, β).

Exemple. Pour $(\alpha, \beta) = (2.3.1, 5.3)$ et $e = 4$

$$T_{(\alpha,\beta)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{1} \\ \cline{1-2} 3 & 0 & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{2} \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & \mathbf{3} \\ \cline{1-3} \end{array} \right).$$

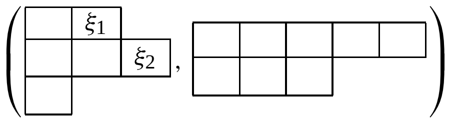
Les résidus en gras sont les résidus des boîtes de la frontière de (α, β).

Remarquons maintenant que la définition de la a-collection permet de définir un ordre sur les éléments de la frontière de (α, β) :

Soient ξ_1 et ξ_2, deux éléments de la frontière de (α, β), γ_{i_1} et γ_{i_2} les deux éléments de la a-collection associée aux deux parts où se trouvent ξ_1 et ξ_2. On dira que ξ_1 est au-dessus de ξ_2 si $\gamma_{i_1} > \gamma_{i_2}$ ou si $\gamma_{i_1} = \gamma_{i_2}$ et que la part sur laquelle se trouve ξ_1 est strictement plus grande que la part sur laquelle se trouve ξ_2.

Remarquons que cet ordre est différent de celui donné dans [1] pour définir les bipartitions Kleshchev.

Exemple. Pour $(\alpha, \beta) = (2.3.1, 5.3)$ et $e = 4$



ξ_2 est ici au dessus de ξ_1.

Rappelons maintenant l'ordre de dominance sur les partitions de $l \in \mathbb{N}$:

Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ des bipartitions de l, on dit que μ domine λ et on écrit $\lambda \trianglelefteq \mu$ si pour tout $k = 1, \dots, r$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mu_i.$$

On a maintenant la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soient (α, β) et (α', β') des bicompositions de n, γ et γ' les a-collections associées de même degré. Si $\gamma \trianglerighteq \gamma'$, alors $a(\alpha, \beta) \leqslant a(\alpha', \beta')$, avec égalité si et seulement si $\gamma = \gamma'$.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} a(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^{2m} (i-1)\gamma_i - \sum_{i=1}^{2m} \binom{2m-2i}{2i} \\ &= \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m} + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m} + \cdots + \gamma_{2m} - \sum_{i=1}^{2m} \binom{2m-2i}{2i}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \gamma'_i$ pour tout $k = 1, \dots, 2m$ et comme γ et γ' ont même degré, on a :

$$\sum_{i=k+1}^{2m} \gamma_i \leqslant \sum_{i=k+1}^{2m} \gamma'_i$$

pour tout $k = 1, \dots, 2m$. On obtient donc :

$$a(\alpha, \beta) \leqslant a\big(\alpha', \beta'\big).$$

Si $\gamma \neq \gamma'$, il existe $k \in \{1, \dots, 2m-1\}$ tel que :

$$\sum_{i=k+1}^{2m} \gamma_i < \sum_{i=k+1}^{2m} \gamma'_i.$$

D'où $a(\alpha, \beta) < a(\alpha', \beta')$. $\square$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés combinatoires concernant les a-bipartitions.

3.2. a-suites de résidus

Introduisons tout d'abord quelques définitions :

Soit (λ, μ) une bipartition de n et soit $T_{(\lambda,\mu)}$ le tableau de Young associé. Si $T_{(\lambda,\mu)} = T_{(\lambda',\mu')} \cup \{\gamma\}$ et si $\mathrm{res}(\gamma) = i$, on dit que γ est une i-boîte supprimable de (λ, μ) ou une i-boîte ajoutable de (λ', μ').

Les lemmes suivants vont nous permettre de définir des suites de résidus associées aux a-bipartitions. Ceci va nous permettre de prouver que les a-bipartitions indexent les éléments de $\mathcal{B}$ pour le type B_n à paramètres $\{1, u\}$.

Lemme 3.2. *Soit $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ une a-bipartition et soit γ sa a-collection. On considère ξ_1 la plus haute boîte supprimable de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ selon l'ordre induit par γ (en fait, on a a priori deux choix possibles pour ξ_1).*

On suppose que ξ_1 est sur une part $\alpha_{j_1}^{(i_1)}$ et que son résidu est k_1. Alors, si ξ_2 est une $(k_1 - 1)$-boîte sur la frontière de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, associée à une part $\alpha_{j_2}^{(i_2)}$. On a :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} + m - j_1 - 1 > \alpha_{j_2}^{(i_2)} + m - j_2.$$

Preuve. *Si $i_1 = i_2$*. Comme $\alpha^{(i_1)}$ est e-régulière et ξ_1 est supprimable, il n'y a pas de boîtes de résidu $k_1 - 1$ sur la frontière d'une part $\alpha_k^{(i_1)}$, avec $\alpha_k^{(i_1)} = \alpha_{j_1}^{(i_1)}$. Comme ξ_1 est la plus haute boîte supprimable, on a :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} > \alpha_{j_2}^{(i_2)}.$$

D'où :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} + m - j_1 - 1 > \alpha_{j_2}^{(i_2)} + m - j_2.$$

Si $i_1 \neq i_2$. Notons ξ_3 la plus haute boîte supprimable de $\alpha^{(i_2)}$, associée à une part $\alpha_{j_3}^{(i_2)}$. On a, par hypothèse :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} + m - j_1 \geqslant \alpha_{j_3}^{(i_2)} + m - j_3. \tag{1}$$

On raisonne par l'absurde en supposant donc :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} + m - j_1 - 1 \leqslant \alpha_{j_2}^{(i_2)} + m - j_2. \tag{2}$$

Comme ξ_1 est une (k_1)-boîte et ξ_2 est une $(k_1 - 1)$-boîte, on a :

$$\underbrace{\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1}_{k_1 \pmod e} - 1 = \underbrace{\alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - \frac{e}{2}}_{k_1 - 1 \pmod e} \pmod e.$$

Il existe donc $t \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1 - 1 = \alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - \frac{e}{2} + te. \tag{3}$$

Par (2), on a $t \leqslant 0$.

Remarquons que l'on a nécessairement $\alpha_{j_2}^{(i_2)} = \alpha_{j_3}^{(i_2)}$. En effet, comme ξ_3 est supprimable et comme $\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1 \geqslant \alpha_{j_3}^{(i_2)} - j_3$, on a $\alpha_{j_2}^{(i_2)} \geqslant \alpha_{j_3}^{(i_2)}$ et comme ξ_3 est la plus haute boîte supprimable de $\alpha^{(i_2)}$, il suit $\alpha_{j_2}^{(i_2)} = \alpha_{j_3}^{(i_2)}$.

Considérons maintenant deux cas :

- Si $t < 0$, on a, par (1) et (3) :

  $$\alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - \frac{e}{2} - e \geqslant \alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - \frac{e}{2} + te \geqslant \alpha_{j_3}^{(i_2)} - j_3 - 1.$$

  Comme $\alpha_{j_2}^{(i_2)} = \alpha_{j_3}^{(i_2)}$, il suit :

  $$j_3 - j_2 \geqslant \frac{3e}{2} - 1 \geqslant e.$$

  Mais alors $\alpha^{(i_2)}$ n'est pas e-régulière ce qui est absurde.
- Si $t = 0$, on a, par (3), $\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1 - 1 = \alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - e/2$, alors :

- Si $\alpha_{j_1}^{(i_1)} = \alpha_{j_2}^{(i_2)}$, on obtient $j_1 - j_2 = e/2 - 1$. Considérons les résidus associés aux boîtes de la frontière des parts de longueur $\alpha_{j_1}^{(i_1)}$:

$$\text{pour } \alpha_{j_1}^{(i_1)} : \quad k_1, k_1+1, \dots, k_1 - 1 + \frac{e}{2} \pmod e \,;$$
$$\text{pour } \alpha_{j_2}^{(i_2)} : \quad k_1-1, k_1-2, \dots, k_1 - 1 - \frac{e}{2} + 1 = k_1 + \frac{e}{2} \pmod e.$$

  Ceci contredit la condition (2) des a-bipartitions.
- Si $\alpha_{j_1}^{(i_1)} > \alpha_{j_2}^{(i_2)}$ alors :

$$j_1 - j_2 = \alpha_{j_1}^{(i_1)} - \alpha_{j_2}^{(i_2)} + \frac{e}{2} - 1 \geqslant \frac{e}{2}.$$

  On obtient $\alpha_{j_1}^{(i_1)} > \alpha_1^{(i_2)}$ avec $j_1 \geqslant e/2 + 1$ ce qui contredit la condition (1) des a-bipartitions.
- Si $\alpha_{j_1}^{(i_1)} < \alpha_{j_2}^{(i_2)}$ alors, par (1) :

$$\alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2 - \frac{e}{2} \geqslant \alpha_{j_3}^{(i_2)} - j_3 - 1.$$

  D'où $j_3 - j_2 \geqslant e/2 - 1$ et comme $\alpha_{j_3}^{(i_2)} > \alpha_1^{(i_1)}$, la condition (1) des a-bipartitions implique $j_3 - j_2 = e/2 - 1$. Donc :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + (j_3 - j_2) = \alpha_{j_2}^{(i_2)} - j_2.$$

  Et il suit :

$$\alpha_{j_1}^{(i_1)} - j_1 = \alpha_{j_3}^{(i_2)} - j_3.$$

  Alors, selon l'ordre induit par la a-collection, comme $\alpha_{j_3}^{(i_2)} > \alpha_{j_1}^{(i_1)}$, ξ_3 est plus haute que ξ_1. Comme ξ_3 est supprimable, c'est une contradiction. □

Lemme 3.3. *Soit $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ une a-bipartition et soit γ sa a-collection. On considère ξ_1 la plus haute boîte supprimable de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ selon l'ordre induit par γ comme dans le lemme précédent.*

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ les k_1-boîtes supprimables de la frontière de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, associées aux éléments de γ : $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}$.

On considère η_s la plus haute $(k_1 - 1)$-boîte de la frontière de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ (supprimable ou non supprimable) associée à γ_s.

Soient $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$ la bipartition obtenue en supprimant les boîtes ξ_j vérifiant $\gamma_{i_j} > \gamma_s + 1$. Alors $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$ est une a-bipartition de degré strictement inférieur à $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$.

Preuve. D'après le Lemme 3.2, ξ_1 est tel que :

$$\gamma_{i_1} - 1 > \gamma_s.$$

Donc le degré de $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$ est bien strictement inférieur à celui de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$.

Vérifions maintenant les 2 propriétés des a-bipartitions pour $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$:

(1) Il suffit de vérifier que si $\alpha_i^{(1)} = \alpha_{i+e/2}^{(2)}$ et que l'on enlève une boîte à $\alpha_i^{(1)}$ pour obtenir $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$, on enlève une boîte à $\alpha_{i+e/2}^{(2)}$.

Soit ξ_p la boîte sur la frontière de $\alpha_i^{(1)}$ de résidu k_1. On suppose que ξ_p est supprimable et que si η est une (k_1-1)-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_j^{(l)}$, on a :

$$\alpha_i^{(1)} - i - 1 > \alpha_j^{(l)} - j.$$

Supposons donc $\alpha_i^{(1)} = \alpha_{i+e/2}^{(2)}$. Notons $\xi_{p'}$ la boîte sur la frontière de $\alpha_{i+e/2}^{(2)}$. Cette boîte a pour résidu :

$$k_2 = \alpha_{i+e/2}^{(2)} - \left(i + \frac{e}{2}\right) + \frac{e}{2} = \alpha_i^{(1)} - i = k_1 \pmod e.$$

De plus, $\xi_{p'}$ est une boîte supprimable, sinon, on a $\alpha_{i+1}^{(1)} < \alpha_{i+e/2+1}^{(2)}$ qui contredit la condition (1) de a-bipartition.

Il reste donc à voir que si η est une (k_1-1)-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_j^{(l)}$, on a :

$$\alpha_{i+\frac{e}{2}}^{(2)} - \left(i + \frac{e}{2}\right) - 1 > \alpha_j^{(l)} - j.$$

On raisonne par l'absurde en supposant donc :

$$\alpha_i^{(1)} - i - 1 > \alpha_j^{(l)} - j \geqslant \alpha_{i+e/2}^{(2)} - i - \frac{e}{2} - 1. \tag{1}$$

Distinguons deux cas :

- Si $l = 1$, on a :

$$\alpha_i^{(1)} - i = k_1 \pmod e \quad \text{et} \quad \alpha_j^{(1)} - j = k_1 - 1 \pmod e.$$

Donc il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha_i^{(1)} - i - 1 = \alpha_j^{(1)} - j + te.$$

Par (1), on a $t > 0$. D'où :

$$\left(\alpha_i^{(1)} - i\right) - \left(\alpha_j^{(1)} - j\right) > e.$$

Donc :

$$\alpha^{(2)}_{i+\frac{e}{2}} - \left(i + \frac{e}{2}\right) = \alpha^{(1)}_i - i - \frac{e}{2} > \alpha^{(1)}_j - j + \frac{e}{2} \geqslant \alpha^{(1)}_j - j + 1.$$

D'où la contradiction avec (1).

- Si $l = 2$, il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha^{(1)}_i - i - 1 = \alpha^{(2)}_j - j + \frac{e}{2} + te.$$

Par (1), on a $t \geqslant 0$, donc :

$$\alpha^{(2)}_{i+e/2} - \left(i + \frac{e}{2}\right) - \left(\alpha^{(2)}_j - j\right) \geqslant 1.$$

On obtient donc :

$$\alpha^{(2)}_{i+e/2} - \left(i + \frac{e}{2}\right) \geqslant \left(\alpha^{(2)}_j - j\right) + 1.$$

L'égalité est impossible car $\xi_{p'}$ est supprimable donc $\alpha^{(2)}_{i+e/2} > \alpha^{(2)}_j$ et $i + e/2 < j$. On obtient finalement une contradiction avec (1).

Donc la condition (1) reste vérifiée.

(2) Le seul problème est lorsque l'on enlève une boîte ξ_p de résidu k_1 sur une part $\alpha^{(1)}_i$ et que si l'on considère les parts de longueurs $\alpha^{(1)}_i - 1$ sur $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, on a les résidus sur la frontière :

$$\{0, 1, \ldots, e-1\} \setminus \{k_1 - 1\}.$$

Considérons les boîtes de résidus k_1 associées aux parts de longueur $\alpha^{(1)}_i - 1$. Ce sont nécessairement des boîtes supprimables ; sinon, on aurait une boîte de résidu $k_1 - 1$ sur la frontière d'une part de longueur $\alpha^{(1)}_i - 1$.

Soit η une $(k_1 - 1)$-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(l)}_j$, comme la boîte ξ_p est supprimée, on a :

$$\alpha^{(1)}_i - i - 1 > \alpha^{(l)}_j - j.$$

On a alors les propriétés suivantes :

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(1)}_{j_1} = \alpha^{(1)}_i - 1$, il existe $m \leqslant 0$ tel que :

$$\alpha^{(1)}_{j_1} - j_1 = \alpha^{(1)}_i - i + me.$$

Comme $\alpha^{(1)}$ est e-régulière, on a $m = -1$ et la boîte est supprimable d'où :

$$\alpha^{(1)}_{j_1} - j_1 + e = \alpha^{(1)}_i - i.$$

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(2)}_{j_2} = \alpha^{(1)}_i - 1$, il existe $m \geqslant 0$ tel que :

$$\alpha^{(1)}_i - i = \alpha^{(2)}_{j_2} - j_2 + \frac{e}{2} + me.$$

Supposons $m \geqslant 2$, alors, comme $\alpha^{(2)}_{j_2} = \alpha^{(1)}_i - 1$, on a :

$$j_2 - i \geqslant \frac{5e}{2} - 1.$$

Considérons alors $u = i + e$, $\alpha^{(1)}$ étant e-régulière, on a $\alpha^{(1)}_u < \alpha^{(2)}_{j_2}$ avec $j_2 - u \geqslant e/2$, ce qui contredit la condition (1) de a-bipartition.
On a donc :

$$\alpha^{(1)}_i - i = \alpha^{(2)}_{j_2} - j_2 + \frac{e}{2} + me \quad \text{avec } m = 0 \text{ ou } 1.$$

Considérons maintenant 2 cas :

Si $l = 1$. On a $\alpha^{(1)}_i - i = \alpha^{(1)}_j - j + 1 \pmod e$ d'où, comme $\alpha^{(1)}_i - i - 1 > \alpha^{(1)}_j - j$, il suit :

$$\left(\alpha^{(1)}_i - i\right) - \left(\alpha^{(1)}_j - j\right) \geqslant e + 1.$$

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(1)}_{j_1} = \alpha^{(1)}_i - 1$, on a vu $\alpha^{(1)}_{j_1} - j_1 + e = \alpha^{(1)}_i - i$ d'où $(\alpha^{(1)}_{j_1} - j_1) - (\alpha^{(1)}_j - j) \geqslant 1$. L'égalité est impossible car $\alpha^{(1)}_{j_1} > \alpha^{(1)}_j$ (la boîte étant supprimable) d'où :

$$\left(\alpha^{(1)}_{j_1} - j_1\right) - \left(\alpha^{(1)}_j - j\right) > 1.$$

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(2)}_{j_2} = \alpha^{(1)}_i - 1$, on considère 2 cas :
  - Soit $\alpha^{(1)}_i - i = \alpha^{(2)}_{j_2} - j_2 + e/2$ alors $(\alpha^{(2)}_{j_2} - j_2) - (\alpha^{(1)}_j - j) > 1$.
  - Soit $\alpha^{(1)}_i - i = \alpha^{(2)}_{j_2} - j_2 + 3e/2$ alors $j_2 - i = 3e/2 - 1$.
    Par la condition (1) de a-bipartition, on a $\alpha^{(1)}_{i+e-1} \geqslant \alpha^{(2)}_{i+e-1+e/2} = \alpha^{(2)}_{j_2}$, on obtient donc $\alpha^{(1)}_{i+e-1} = \alpha^{(2)}_{j_2}$ avec $\alpha^{(1)}_{i+e-1} - (i + e - 1) = k_1 \pmod e$. On se retrouve donc dans le premier cas qui implique :

$$\alpha^{(1)}_{i+e-1} - (i + e - 1) - \left(\alpha^{(1)}_j - j\right) \geqslant e + 1.$$

Donc :

$$\big(\alpha_{j_2}^{(2)} - j_2\big) - \big(\alpha_j^{(1)} - j\big) = \alpha_{i+e-1}^{(1)} - (i+e-1) - \big(\alpha_j^{(1)} - j\big) - \frac{e}{2} > 1.$$

Si $l = 2$. Il existe $m \geqslant 0$ tel que :

$$\alpha_i^{(1)} - i = \alpha_j^{(2)} - j + \frac{e}{2} + me + 1.$$

Si $m \geqslant 1$, alors :

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_{j_1}^{(1)} = \alpha_i^{(1)} - 1$, on a $\alpha_{j_1}^{(1)} - j_1 = \alpha_i^{(1)} - i - e$ d'où :

$$\big(\alpha_{j_1}^{(1)} - j_1\big) - \big(\alpha_j^{(2)} - j\big) > 1.$$

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_{j_2}^{(2)} = \alpha_i^{(1)} - 1$, on a $(\alpha_{j_2}^{(2)} - j_2) - (\alpha_j^{(2)} - j) \geqslant 1$ et l'égalité est impossible car $\alpha_{j_2}^{(2)} > \alpha_j^{(2)}$.

Si $m = 0$, on a $\alpha_i^{(1)} - i = \alpha_j^{(2)} - j + e/2 + 1$, alors :

- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_{j_1}^{(1)} = \alpha_i^{(1)} - 1$, on a $\alpha_i^{(1)} - i = \alpha_{j_1}^{(1)} - j_1 + e$, d'où $\alpha_j^{(2)} - j + 1 = \alpha_{j_1}^{(1)} - j_1 + e/2$.
  - Soit $\alpha_{j_1}^{(1)} > \alpha_j^{(2)}$, alors $j_1 - j = \alpha_{j_1}^{(1)} - \alpha_j^{(2)} + e/2 - 1 \geqslant e/2$, d'où :

$$\alpha_{j+e/2}^{(1)} \geqslant \alpha_{j_1}^{(1)} > \alpha_j^{(2)}.$$

    Ce qui est en contradiction avec la condition (1) de a-bipartition.
  - Soit $\alpha_{j_1}^{(1)} < \alpha_j^{(2)}$, alors $j - i = \alpha_j^{(2)} - \alpha_{j_1}^{(1)} + e/2 > e/2$, on obtient donc $\alpha_j^{(2)} > \alpha_{i+1}^{(1)}$ avec $j - (i+1) \geqslant e/2$ en contradiction avec la condition (1) de a-bipartition.
  - $\alpha_{j_1}^{(1)} = \alpha_j^{(2)}$ est impossible car on n'a pas de boîte de résidu $k_1 - 1$ sur la frontière d'une part de longueur $\alpha_{j_1}^{(1)}$.
- Si on a une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha_{j_2}^{(2)} = \alpha_i^{(1)} - 1$:
  - Soit $\alpha_i^{(1)} - i = \alpha_{j_2}^{(2)} - j_2 + e/2$ alors $(\alpha_{j_2}^{(2)} - j_2) - (\alpha_j^{(2)} - j) = 1$ ce qui est impossible car $\alpha_j^{(2)} \neq \alpha_{j_2}^{(2)}$.
  - Soit $\alpha_i^{(1)} - i = \alpha_{j_2}^{(2)} - j_2 + 3e/2$ alors $j_2 - i = 3e/2 - 1$ et par la condition (1) de a-bipartition $\alpha_{i+e-1}^{(1)} \geqslant \alpha_{j_2}^{(2)}$, il suit $\alpha_{i+e-1}^{(1)} = \alpha_{j_2}^{(2)}$. On obtient donc :

$$\alpha_{i+e-1}^{(1)} - (i+e-1) = k_1 \pmod{e}.$$

On a donc une k_1-boîte sur la frontière d'une part $\alpha^{(1)}_{j_1} = \alpha^{(1)}_i - 1$, on a vu que c'est absurde.

Suivant la procédure du lemme, les k_1-boîtes sur $\alpha^{(1)}_{j_1}$ et $\alpha^{(2)}_{j_2}$ doivent se supprimer. Les résidus associés aux boîtes de la frontière des parts de longueur $\alpha^{(1)}_i - 1$ de $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$ sont donc dans :

$$\{0, 1, \dots, e-1\} \setminus \{k_1\}.$$

La condition (2) de a-bipartition reste donc vérifiée. □

Grâce à ce lemme, nous pouvons définir une suite de résidus associée à ces a-bipartitions :

Définition 3.4. Soit $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ une a-bipartition. On considère ξ_1 la plus haute boîte supprimable et soit k_1 son résidu (si on a deux choix possibles pour ξ_1, on pourra prendre la boîte de $\alpha^{(1)}$ pour que la a-suite de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ soit unique).

Soit $(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)})$ la a-bipartition obtenue en supprimant les a_1 boîtes supprimables suivant la procédure du Lemme 3.3. Alors on définit récursivement la a-suite de résidus de $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, notée a-suite$(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ par :

$$a\text{-suite}\big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\big) = a\text{-suite}\big(\alpha'^{(1)}, \alpha'^{(2)}\big), \underbrace{k_1, \dots, k_1}_{a_1}.$$

Exemple. Pour $(\alpha, \beta) = (3.2.1, 1.1.1)$ et $e = 4$

$$T_{(\alpha,\beta)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & \\ \cline{1-2} 2 & & \\ \cline{1-1} \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \right).$$

La a-collection de (α, β), pour $m = 6$, est donnée par $\gamma = (8, 6, 6, 5, 4, 4)$.

La plus haute boîte supprimable de (α, β) est de résidu 2, ensuite on a une autre 2-boîte supprimable mais il existe une 1-boîte sur la frontière de (α, β) avec part de la a-collection associée plus grande que celle associée à la 2-boîte.

On obtient donc :

$$a\text{-suite}(\alpha, \beta) = a\text{-suite}(2.2.1, 1.1.1), 2.$$

Remarquons que (2.2.1, 1.1.1) est bien une a-bipartition. On applique la procédure à cette bipartition. Finalement, on trouve :

$$a\text{-suite}(\alpha, \beta) = 0, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 2.$$

Nous allons maintenant pouvoir donner une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{B}$ dans la cas où H est une algèbre de Hecke de type B_n avec diagramme donné dans l'introduction.

4. Caractérisation de $\mathcal{B}$

En effectuant des calculs sur GAP, M. Geck a pu remarquer que pour $e = 2$, les bipartitions indexant les éléments de $\mathcal{B}$ pour le type B_n à paramètre $\{1, u\}$ semblaient coïncider avec les bipartitions (α, β) (avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ et $\alpha_m \neq 0$ ou $\beta_m \neq 0$) possédant les propriétés suivantes :

- (α, β) est 2-régulière,
- pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_i \neq \beta_i$,
- pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\min\{\alpha_i, \beta_i\} \geqslant \max\{\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}\}$.

Dans [4], C. Bessenrodt a pu montrer que la fonction génératrice de cette classe de bipartition coïncidait avec celle donnée par les bipartitions Kleshchev dans [3].

En fait, ces bipartitions sont exactement celles données par les a-bipartitions pour le cas $e = 2$. Ce sont ces remarques qui ont permis de commencer le travail exposé ici : nous généralisons ici la conjecture ci-dessus en montrant que les bipartitions indexant les éléments de $\mathcal{B}$ sont donnés par les a-bipartitions.

Afin de démontrer ce résultat, introduisons tout d'abord quelques notations : soit (λ, μ) et (λ', μ') des bicompositions de n et $n + 1$ et soit i un résidu. On note :

- $(\lambda, \mu) \xmapsto[(j,p)]{i} (\lambda', \mu')$ si (λ', μ') est obtenue à partir de (λ, μ) en rajoutant une i-boîte sur la $j$ième part de la $p$ième composition de (λ, μ),
- $(\lambda, \mu) \xmapsto[(j,p)]{\mathrm{opt}(i)} (\lambda', \mu')$ si (λ', μ') est obtenue à partir de (λ, μ) en rajoutant une i-boîte sur la $j$ième part de la $p$ième composition de (λ, μ), la plus haute part possible selon l'ordre induit par la a-collection de (λ, μ).

Remarque 4.1. Soit (λ, μ) une a-bipartition et soit (λ', μ') la a-bipartition obtenue en supprimant les a_1 boîtes supprimables de résidu k_1 selon la procédure du Lemme 3.3. On a alors une suite :

$$(\lambda', \mu') \xmapsto[(j_1,p_1)]{\mathrm{opt}(k_1)} \cdots \xmapsto[(j_{a_1},p_{a_1})]{\mathrm{opt}(k_1)} (\lambda, \mu).$$

En fait, selon l'ordre induit par la a-collection, cette suite n'est formée que de a-bipartitions.

On a maintenant la proposition suivante :

Proposition 4.2. *Soit $(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$ une a-bipartition de n, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sa a-suite de résidus. Par construction* (*Lemme* 3.3)*, on a une suite formée de a-bipartitions* :

$$(\emptyset, \emptyset) \xmapsto[(j_1,p_1)]{\mathrm{opt}(s_1)} \left(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}\right) \xmapsto[(j_2,p_2)]{\mathrm{opt}(s_2)} \left(\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}\right) \xmapsto[(j_3,p_3)]{\mathrm{opt}(s_3)} \cdots \xmapsto[(j_n,p_n)]{\mathrm{opt}(s_n)} \left(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right).$$

Alors, si on a une autre suite formée de bicompositions :

$$(\emptyset,\emptyset) \xmapsto[(j'_1,p'_1)]{s_1} \big(\lambda'^{(1)},\mu'^{(1)}\big) \xmapsto[(j'_2,p'_2)]{s_2} \big(\lambda'^{(2)},\mu'^{(2)}\big) \xmapsto[(j'_3,p'_3)]{s_3} \cdots \xmapsto[(j'_n,p'_n)]{s_n} \big(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)}\big).$$

On a $a(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) \leqslant a(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$ *et si* $a(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) = a(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$, *on a* $(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) = (\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$.

Preuve. On montre par récurrence sur $n-r$ que si l'on a 2 suites :

$$\big(\lambda^{(r-1)},\mu^{(r-1)}\big) \xmapsto[(j_r,p_r)]{\mathrm{opt}(s_r)} \big(\lambda^{(r)},\mu^{(r)}\big) \xmapsto[(j_{r+1},p_{r+1})]{\mathrm{opt}(s_{r+1})} \cdots \xmapsto[(j_n,p_n)]{\mathrm{opt}(s_n)} \big(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\big), \tag{1}$$

$$\big(\lambda^{(r-1)},\mu^{(r-1)}\big) \xmapsto[(j'_r,p'_r)]{s_r} \big(\lambda'^{(r)},\mu'^{(r)}\big) \xmapsto[(j'_{r+1},p'_{r+1})]{s_{r+1}} \cdots \xmapsto[(j'_n,p'_n)]{s_n} \big(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)}\big). \tag{2}$$

On a $a(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) \leqslant a(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$ et si $a(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) = a(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$ alors $(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) = (\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$.

Si $n-r=0$. Supposons $(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}) \neq (\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$ et considérons la a-collection $\gamma^{(n-1)}$ associée à $(\lambda^{(n-1)},\mu^{(n-1)})$, soient $\gamma_u^{(n-1)}$ et $\gamma_{u'}^{(n-1)}$ les parts de $\gamma^{(n-1)}$ associées à (j_n,p_n) et (j'_n,p'_n). D'après le Lemme 3.3, on a :

$$\gamma_u^{(n-1)} \geqslant \gamma_{u'}^{(n-1)} + 1.$$

Considérons alors les a-collections $\gamma^{(n)}$ et $\gamma'^{(n)}$ associées à $(\lambda^{(n)},\mu^{(n)})$ et $(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)})$, on a :

$$\gamma^{(n)} \rhd \gamma'^{(n)} \quad \text{et} \quad \gamma^{(n)} \neq \gamma'^{(n)}.$$

On utilise alors la Proposition 3.1, on a :

$$a\big(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\big) < a\big(\lambda'^{(n)},\mu'^{(n)}\big).$$

Si $n-r>0$. Soit k minimal tel que $(j'_k,p'_k) = (j_r,p_r)$ (si il n'existe pas de k tel que $(j'_k,p'_k) = (j_r,p_r)$, on choisira dans ce qui suit $k=n+1$). On définit un suite :

$$\big(\lambda^{(r-1)},\mu^{(r-1)}\big) \xmapsto[(j_r,p_r)]{\mathrm{opt}(s_r)} \big(\lambda^{(r)},\mu^{(r)}\big) \xmapsto[(j''_{r+1},p''_{r+1})]{s_{r+1}} \cdots \xmapsto[(j''_n,p''_n)]{s_n} \big(\lambda''^{(n)},\mu''^{(n)}\big). \tag{3}$$

Où la suite de couples (j''_t,p''_t) est donnée par :

- pour $t<k$:
  - si $(j'_t,p'_t) = (j'_r,p'_r)$, on pose $(j''_t,p''_t) = (j_r,p_r)$,
  - si $(j'_t,p'_t) \neq (j'_r,p'_r)$, on pose $(j''_t,p''_t) = (j'_t,p'_t)$;
- pour $t \geqslant k$:
  - si $(j'_t,p'_t) = (j'_r,p'_r)$ ou $(j'_t,p'_t) = (j_r,p_r)$, on pose $(j''_t,p''_t) = (j_r,p_r)$ si le résidu associée à (j_r,p_r) est compatible avec la suite, sinon on pose $(j''_t,p''_t) = (j'_r,p'_r)$,

◦ sinon, on pose $(j''_t, p''_t) = (j'_t, p'_t)$.

La suite (3) est formé de bicompositions et la bicomposition $(\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)})$ ne diffère de $(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)})$ que de 2 parts associées à (j_r, p_r) et (j'_r, p'_r).

- Si $(j_r, p_r) = (j'_r, p'_r)$, on peut directement conclure par récurrence.
- Si $(j_r, p_r) \neq (j'_r, p'_r)$, supposons $(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)}) \neq (\lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$, alors, si on note $\gamma'^{(n)}$ et $\gamma''^{(n)}$ les a-collections associées à $(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)})$ et $(\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)})$, on a :

$$\gamma''^{(n)} \rhd \gamma'^{(n)} \quad \text{et} \quad \gamma''^{(n)} \neq \gamma'^{(n)}.$$

Donc d'après la Proposition 3.1, il suit :

$$a\big(\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)}\big) < a\big(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)}\big).$$

Finalement, par récurrence, on a $a(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}) \leqslant a(\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)})$ d'où :

$$a\big(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\big) \leqslant a\big(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)}\big).$$

Si $a(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}) = a(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)})$ alors, par récurrence $(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}) = (\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)})$ et $(\lambda''^{(n)}, \mu''^{(n)}) = (\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)})$ d'où :

$$\big(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\big) = \big(\lambda'^{(n)}, \mu'^{(n)}\big). \qquad \square$$

On utilise maintenant les notations adoptées dans la Section 2.3 :

Définition 4.3. Pour chaque $\underline{\lambda} \in \Lambda_1$ de degré n avec

$$\underbrace{i_1, \ldots, i_1}_{a_1}, \ldots, \underbrace{i_l, \ldots, i_l}_{a_l}$$

comme a-suite de résidus, on note :

$$A(\underline{\lambda}) = f_{i_l}^{a_l} \ldots f_{i_1}^{a_1}(\emptyset, \emptyset).$$

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{F}_e^n$ $\mathbb{Q}$-espace vectoriel avec base donnée par l'ensemble des bipartitions de degré n. Soit $U \simeq \mathcal{G}(A_{e-1}^{(1)})(\emptyset, \emptyset)$ module de plus haut poids (voir [2]). Considérons $U_n := U \cap \mathcal{F}_e^n$, c'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel avec base donnée par l'ensemble :

$$\left\{ G(\underline{\mu}) = \sum_{\underline{\mu} \unrhd \lambda} d_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}} \underline{\lambda} \;\middle|\; \underline{\mu} \in \Lambda_0 \text{ de degré } n \right\}.$$

On en déduit donc :

Corollaire 4.4. *L'ensemble* $\{A(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1$ *de degré* $n\}$ *est une base de* U_n.

Preuve. L'ensemble est libre : d'après la Proposition 4.2 ; pour $\underline{\lambda} \in \Lambda_1$, $\underline{\mu} \in \Lambda$ de degré n, il existe $m_{\underline{\lambda},\underline{\mu}} \in \mathbb{N}$ avec $m_{\underline{\lambda},\underline{\lambda}} \neq 0$ tel que :

$$A(\underline{\lambda}) = m_{\underline{\lambda},\underline{\lambda}}\underline{\lambda} + \sum_{a(\underline{\lambda})<a(\underline{\mu})} m_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}\underline{\mu}.$$

On a donc une décomposition triangulaire d'où le résultat.

On conclut ensuite par cardinalité : suivant la Section 2.2, les a-bipartitions de degré n indexent les modules simples de $H_{\mathbb{C}}$, on a donc :

$$\left|\left\{G(\underline{\mu}) \mid \underline{\mu} \in \Lambda_0 \text{ de degré } n\right\}\right| = \left|\left\{A(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1 \text{ de degré } n\right\}\right|.$$

L'ensemble $\{A(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1$ de degré $n\}$ est donc une base de U_n. □

On peut maintenant démontrer le résultat principal :

Théorème 4.5. *Avec les notations adoptées dans la Section* 2.1, *on a* :

$$\mathcal{B} = \left\{V^{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1 \textit{ de degré } n\right\}.$$

Où l'ensemble Λ_1 *est donné par la Définition* 2.2.

Preuve. On va utiliser la caractérisation de $\mathcal{B}$ donnée dans la Section 2.1 : pour tout $V^{\underline{\lambda}} \in \mathcal{B}$, il existe un $H_{\mathcal{O}}$-module projectif indécomposable P et $M \in \mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$ vérifiant :

$$[P_K] = \left[V^{\underline{\lambda}}\right] + \sum_{\substack{S\in \mathrm{Irr}(H_K)\\ a_S > a_{V^{\underline{\lambda}}}}} d_{S,M}[S].$$

Ainsi, les éléments de $\mathcal{B}$ sont les modules simples $V^{\underline{\lambda}}$ indexés par des bipartitions de a minimale dans la décomposition des $G(\underline{\mu})$ pour $\underline{\mu} \in \Lambda_0$.

D'après le corollaire précédent, pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda_1$ de degré n, il existe $\delta_{\underline{\mu},\underline{\lambda}}$ tel que :

$$G(\underline{\mu}) = \sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda_1} \delta_{\underline{\mu},\underline{\lambda}} A(\underline{\lambda}).$$

Or, d'après la Proposition 4.2, les $A(\underline{\lambda})$ possèdent une décomposition « triangulaire » selon a dans $\mathcal{F}_e^n$, il suit que la bipartition de a minimal dans $G(\underline{\mu})$ l'est également dans un $A(\underline{\lambda})$ et est donc une a-bipartition. □

Nous avons donc une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{B}$ en bijection avec $\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$ pour e pair, le cas e impair a déjà été traité par M. Geck dans [12]. Nous allons maintenant nous intéresser aux conséquences de ce résultat pour les algèbres de Hecke de type D_n.

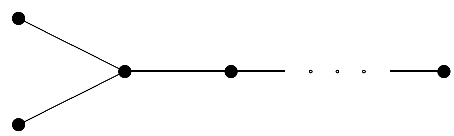
5. Conséquences

Comme conséquence, le Théorème 4.5 nous permet d'obtenir une paramétrisation des modules simples de l'algèbre de Hecke de type D_n dans le cas modulaire :

Avec les notations de l'introduction, posons $T_{s'_1} = T_\sigma T_{s_1} T_\sigma$ et considérons la sous-algèbre H_1 de H engendrée par $\{T_{s'_1}, T_{s_1}, T_{s_2}, \ldots, T_{s_{n-1}}\}$. On a les relations suivantes :

$$(T_{s'_1} - u)(T_{s'_1} + 1) = 0, \qquad (T_{s_i} - u)(T_{s_i} + 1) = 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1,$$
$$T_{s'_1} T_{s_1} = T_{s_1} T_{s'_1}, \qquad T_{s'_1} T_{s_2} T_{s'_1} = T_{s_2} T_{s'_1} T_{s_2}, \qquad T_{s'_1} T_{s_i} = T_{s_i} T_{s'_1} \quad \text{pour } i \geqslant 3,$$
$$T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i} \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2, \qquad T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}} \quad \text{pour } i \geqslant 1.$$

Alors, H_1 est l'algèbre de Hecke générique de type D_n avec diagramme :



Considérons l'algèbre $H_{1,K}$, c'est une algèbre de Hecke semi-simple scindée. Notons Res_1 l'opération de restriction des modules de H à H_1, on a une paramétrisation des modules simples de $H_{1,K}$ à partir de la paramétrisation classique de H_K : Pour $V^{(\lambda,\mu)} \in \mathrm{Irr}(H_K)$, on a :

- Si $\lambda \neq \mu$ alors $\mathrm{Res}_1(V^{(\lambda,\mu)}) = \mathrm{Res}_1(V^{(\mu,\lambda)})$ est un $H_{1,K}$-module simple que l'on note $V^{[\lambda,\mu]}$.
- Si $\lambda = \mu$ alors $\mathrm{Res}_1(V^{(\lambda,\mu)})$ se décompose en deux $H_{1,K}$-modules simples notés $V^{[\lambda,+]}$ et $V^{[\lambda,-]}$.

De plus, chaque $H_{1,K}$-module simple s'obtient par ce procédé (voir par exemple [13]).

Soit $\theta : A \to \mathbb{C}$ tel que $\theta(u) = q$ racine de l'unité d'ordre e où e est pair, on se trouve alors sous les hypothèses du Théorème 4.5, on a donc :

$$\mathcal{B} = \{V^{(\lambda,\mu)} \mid (\lambda,\mu) \in \Lambda_1\}.$$

Notons $\mathcal{B}_1$ la partie de $\mathrm{Irr}(H_{1,K})$ définie de la même façon que pour $\mathcal{B}$ (Section 2.1), $\mathcal{B}_1$ est en bijection avec $\mathrm{Irr}(H_{1,\mathbb{C}})$. Il est montré dans [12] le théorème suivant :

Théorème 5.1 (M. Geck). *$V_1 \in \mathcal{B}_1 \subset \mathrm{Irr}(H_{1,K})$ si et seulement si il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $V_1 \subset \mathrm{Res}_1(V)$.*

Soit $(\lambda,\mu) \in \Lambda_1$ tel que $\lambda = \mu$, alors, par la condition (2) de a-bipartitions, λ doit être $e/2$-régulière. Réciproquement toute bipartition (λ,λ) avec λ $e/2$-régulière est une a-bipartition. On en déduit donc une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{B}_1$:

Corollaire 5.2. *Si $\theta(u) = q$ racine de l'unité d'ordre e où e est pair, la partie $\mathcal{B}_1$ en bijection avec* $\mathrm{Irr}(H_{1,\mathbb{C}})$ *est donnée par* :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ V^{[\lambda,\mu]} \;\middle|\; \lambda \neq \mu,\ (\lambda,\mu) \in \Lambda_1,\ |\lambda| + |\mu| = n \right\}$$
$$\cup \left\{ V^{[\lambda,\pm]} \;\middle|\; \lambda\ \frac{e}{2}\text{-régulière},\ 2|\lambda| = n \right\}.$$

Où Λ_1 désigne l'ensemble des a-bipartitions (*Définition* 2.2) .

Ce corollaire nous donne donc une paramétrisation des modules simples de $H_{1,\mathbb{C}}$.

Remerciements

Je remercie Meinolf Geck pour ses nombreux conseils et orientations, son aide à été précieuse pour l'élaboration et la rédaction de cet article. J'aimerais aussi remercier Bernard Leclerc pour les remarques et suggestions qu'il m'a adressées.

Références

[1] S. Ariki, On the classification of simples modules for cyclotomic Hecke algebras of type $G(m,1,n)$ and Kleshchev multipartitions, Osaka J. Math. 38 (2001) 827–837.
[2] S. Ariki, Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux, in: Univ. Lecture Ser., vol. 26, Amer. Math. Soc., 2002.
[3] S. Ariki, M. Mathas, The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r,1,n)$, Math. Z. 233 (2000) 601–623.
[4] C. Bessenrodt, On pairs of partitions with steadily decreasing parts, J. Combin. Theory Ser. A 99 (1) (2002) 162–174.
[5] C. Curtis, I. Reiner, Methods of Representation Theory, vol. 1, Wiley, New York, 1990.
[6] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, Paths, Maya diagrams and representations of $sl(r,C)$, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989) 149–191.
[7] R. Dipper, G. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. 52 (1986) 20–52.
[8] R. Dipper, G. James, Representations of Hecke algebras of type B_n, J. Algebra 146 (1992) 454–481.
[9] R. Dipper, G. James, E. Murphy, Hecke algebras of type B_n at roots of unity, Proc. London Math. Soc. 70 (1995) 505–528.
[10] O. Foda, B. Leclerc, M. Okado, J.-Y. Thibon, T. Welsh, Branching functions of $A_{n-1}^{(1)}$ and Jantzen–Seitz problem for Ariki–Koike algebras, Adv. Math. 141 (2) (1999) 322–365.
[11] M. Geck, Kazhdan–Lusztig cells and decompositions numbers, Represent. Theory 2 (1998) 264–277.
[12] M. Geck, On the representation theory of Iwahori–Hecke algebras of extended finite Weyl groups, Represent. Theory 4 (2000) 370–397.
[13] M. Geck, G. Pfeiffer, Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras, in: Oxford Science Publications, Oxford University Press, 2000.
[14] M. Geck, R. Rouquier, Filtrations on projective modules for Iwahori–Hecke algebras, in: Modular Representation Theory of Finite Groups (Charlottesville, VA, 1998), de Gruyter, Berlin, 2001, pp. 211–221.
[15] G. Lusztig, On a theorem of Benson and Curtis, J. Algebra 71 (1981) 490–498.